

非平衡统计场论与临界动力学 (I)

广 义 朗 之 万 方 程

周光召 苏肇冰 郝柏林 于 渌

(中国科学院理论物理研究所)

1979 年 9 月 17 日收到

提 要

本文从闭路格林函数顶角方程出发,推导出临界动力学中序参量和守恒量所满足的广义朗之万方程。根据 Ward-Takahashi 恒等式和线性响应理论,确定守恒量方程应具有的形式,它自动包含了模-模耦合项。考察不同的对称群,得到临界动力学的各种模型。整个理论框架也可用于描述远离平衡的稳态附近的行为。

一、引 言

由 Schwinger 及 Keldysh 等人发展起来的闭路格林函数方法已经有了多方面的应用^[1,2]。文献[3—5]中指出,它是研究非平衡态统计场论的有效方法。文献[6]中用它分析了激光这类非平衡耗散系统定态的 Goldstone 模式。本文将闭路格林函数方法用于分析平衡态相变点附近的行为,统一地得出了包括模-模耦合在内的临界动力学完备方程组及拉格朗日场论表述,一方面为半唯象的临界动力学模型提供微观论证,另一方面指出改进现有理论的可能途径。

在相变点附近,长波涨落起主要作用。由于相应的关联长度远远大于热波长(即热运动能量所对应的德布罗意波长),量子效应并不重要。但是,在准粒子描述中,这种经典场论并不对应玻耳兹曼极限,而是对应“超玻色”极限,即准粒子分布密度 $n \propto T/\epsilon$, 这里 T 为绝对温度(我们取 $\hbar = c = k_B = 1$ 的单位制), ϵ 为元激发能量。这种统计场论(或涨落场论)与量子场论有深刻的类比。

我们认为,闭路格林函数是研究这类场论的一种自然的理论框架。若取平衡态密度矩阵,在低温极限($T \ll \epsilon$)自动得到通常的量子场论,在高温极限($T \gg \epsilon$),得到静态临界现象的现代理论(见文献[12]的附录)。在平衡态附近取高温极限,就可求得描述动态临界现象的全部方程。在本文中,我们推导广义朗之万方程,文献[12]讨论拉格朗日形式的场论表述。我们将在以后的文章中讨论这种场论的重正化和具体应用。只要长波涨落起主要作用,整个理论框架对于远离平衡的定态附近的情形也是适用的。Martin, Siggia 和 Rose^[7]通过引入与基本场量不对易的“响应场”,构造了经典的统计场论(文献中常称

为 MSR 场论)。用闭路格林函数表述,这种场论变得非常自然。

二、临界动力学方程组

临界动力学最近有比较详细的总结^[8]。我们只是为了统一符号和下面行文需要,在此作扼要概括。

系统的临界性质由序参量和守恒量描述,它们构成“宏”变量的集合 $Q = \{Q_i, i=1, 2, \dots, n\}$, 这些随机变量的时间演化满足广义的朗之万方程:

$$\frac{\partial Q_i(t)}{\partial t} = K_i(Q) + \xi_i(t), \quad (2.1)$$

其中随机项 $\xi_i(t)$ 反映一切未计入 $\{Q_i\}$ 的自由度的影响,通常假定它们遵从高斯分布,即

$$\begin{aligned} \langle \xi_i(t) \rangle &= 0, \\ \langle \xi_i(t) \xi_j(t') \rangle &= 2\delta_{ij} \delta(t - t'). \end{aligned} \quad (2.2)$$

(2.1) 式的右端函数 $K_i(Q)$ 由两部分构成:

$$K_i(Q) = -\sigma_{ij} \frac{\delta F}{\delta Q_j} + V_i(Q), \quad (2.3)$$

其中自由能 $F \equiv F[Q]$ 是 Q 的泛函,需要根据具体模型给出。静态的平衡条件 $\delta F / \delta Q_i = 0$ 就是 Ginzburg-Landau 方程(以下简称 G-L 方程),因此,不带随机项的(2.1)式又称为含时间的 G-L 方程(简称 TDGL)。(2.3) 式中的系数矩阵 σ_{ij} 原则上可以包含对称部分和反称部分,对称部分反映弛豫运动,反称部分描述正则运动。只讨论弛豫时,可以认为 σ_{ij} 是对称的,涨落耗散定理要求它和(2.2)式中的 σ_{ij} 相同。对角化后,如果相应宏变量 Q_i 不是守恒量,则 $\sigma_i = \text{常数}$ (耗散弛豫),如果 Q_i 是守恒量,则 $\sigma_i = -D_i \nabla^2$ (扩散弛豫), D_i 是扩散系数。

各个“模” Q_i 之间的耗散型耦合可以通过自由能泛函 F 中的耦合项来描述,可逆的模-模耦合,要作为一种单独的“流”,写成(2.3)式中的第二项,它通常的形式是^[9]

$$V_i(Q) = \lambda \sum_j \left(\frac{\partial}{\partial Q_j} A_{ij}(Q) - A_{ij}(Q) \frac{\delta F}{\delta Q_j} \right), \quad (2.4)$$

其中反称张量 A_{ij} 由 Q 的泊松括号或对易子构成,通常取线性近似

$$A_{ij} = f_{ijk} Q_k, \quad (2.5)$$

这里 f_{ijk} 是对称群的结构常数。 A_{ij} 的确切含义见本文第四节。(2.4) 式的形式本身保证了 V_i 满足定态的概率守恒方程:

$$\frac{\partial}{\partial Q_i} (V_i(Q) e^{-F}) = 0, \quad (2.6)$$

也就是 $\{Q_i\}$ 空间中的无散度条件,它保证 e^{-F} 是满足细致平衡条件的稳态分布。

我们看到,广义朗之万方程(2.1)可能包含很丰富的内容,但它的各个部分是根据不同的考虑凑集起来的,终究是一种模型。

动态临界现象理论中的通常作法^[10]是将方程(2.1)迭代求解以构造微扰论。由于出现响应函数和关联函数两种基本“构件”,微扰论的结构比较复杂。这种微扰论的概括描

述就是前面已经提到的 MSR 场论^[7]. 与静态理论中 Wilson 原来的作法类似, 可以利用 (2.1) 式作重正化群变换, 求得递推公式, 得出不动点和临界指数. 近几年来, 用概率泛函的办法, 将 (2.1) 式“提升”成有效拉氏函数, 采用标准的场论方法分析临界动力学^[11], 这些我们将在文献 [12] 中涉及.

三、含时间的 Ginzburg-Landau 方程

一般说来, 作为宏变量的序参量和守恒量都是基本场复合算子的平均值, 我们在记号上稍作区别. 不是守恒量的序参量记为

$$Q_{ci}(x), i = 1, 2, \dots, n,$$

而守恒量记为

$$Q_{c\alpha} \equiv q_\alpha, \alpha = 1, 2, \dots, m.$$

q_α 是相应守恒流平均值的零分量

$$q_\alpha = \langle J_\alpha^0 \rangle. \quad (3.1)$$

可以不失普遍性地取 Q_{ci} 和 q_α 为实场.

引入含有复合算子的闭路顶角函数生成泛函 $\Gamma[Q_c]$, 则序参量和守恒量都满足方程^[4]

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta Q_{ci}(x)} = -J_i(x), i = 1, 2, \dots, n + m. \quad (3.2)$$

在这个方程中完成对 Q_{ci} 的变分后, 再取 $J_i(x_+) = J_i(x_-) = J_i(\mathbf{x}, t)$, 因之 $Q_{ci}(x_+) = Q_{ci}(x_-) = Q_i(\mathbf{x}, t)$, $J_i(\mathbf{x}, t)$ 和 $Q_i(\mathbf{x}, t)$ 就都是定义在普通时间轴 $t(-\infty, +\infty)$ 上的函数了. 现在证明, 当 $Q_i(\mathbf{x}, t)$ 是时空缓慢变化的函数时, (3.2) 式导致广义的 TDGL 方程.

设在时刻 τ 宏观量 $Q_i(\mathbf{x}, \tau)$ 已知. 当 t 在 τ 附近时可以将 (3.2) 式左端展开. 如 x 在正支上, 则有

$$\begin{aligned} -J_i(\mathbf{x}, t) &= \frac{\delta \Gamma}{\delta Q_{ci}(x_+)} \Big|_{Q_{ci}(x_+) = Q_{ci}(x_-) = Q_i(\mathbf{x}, \tau)} \\ &+ \int \Gamma_{Rij}(\mathbf{x}, y) (Q_j(\mathbf{y}, t_y) - Q_j(\mathbf{y}, \tau)) dy, \end{aligned} \quad (3.3)$$

其中 $\Gamma_{Rij}(\mathbf{x}, y)$ 是取了 $Q_{c+} = Q_{c-} = Q$ 之后的推迟两点顶角函数. 如 x 取在负支上, 结果也一样, 因为 $\Gamma_R = \Gamma_{++} - \Gamma_{+-} = \Gamma_{-+} - \Gamma_{--}$ (本文中这类代数运算规则均可参看文献 [12]). (3.3) 式中由于 $Q_j(\mathbf{y}, t_y)$ 随时间缓变, 准到一级小量有

$$Q_j(\mathbf{y}, t_y) - Q_j(\mathbf{y}, \tau) = (t_y - \tau) \frac{\partial Q_j(\mathbf{y}, \tau)}{\partial \tau}. \quad (3.4)$$

代回 (3.3) 式中, 并注意在 $t \equiv t_x \rightarrow \tau$ 极限下有

$$\begin{aligned} \gamma_{ii}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tau) &\equiv -\lim_{t_x \rightarrow \tau} \int dt_y (t_y - t_x) \Gamma_{Rij}(\mathbf{x}, t_x, \mathbf{y}, t_y) \\ &= i \frac{\partial}{\partial k_0} \Gamma_{Rij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, k_0, \tau) \Big|_{k_0=0}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

其中 $\Gamma_{Rij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, k_0, \tau)$ 是推迟顶角函数对 $t_y - t_x$ 作傅氏变换, 并取平均时间 $T \equiv \frac{1}{2}(t_x + t_y) \cong \tau$ 的结果, 得到(以下 τ 改记为 t)

$$\gamma(t) \frac{\partial Q(t)}{\partial t} = \frac{\delta \Gamma}{\delta Q_{c+}} \Big|_{Q_{c+}=Q_{c-}=Q(t)} + J(t), \quad (3.6)$$

这个式子中采用了矩阵记法, 认为 $\gamma_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$ 是以 $i\mathbf{x}$ 和 $j\mathbf{y}$ 为角标的矩阵元.

暂时令

$$I_i(\mathbf{x}, t) \equiv \frac{\delta \Gamma}{\delta Q_{c+}} \Big|_{Q_{c+}=Q_{c-}=Q(t)}, \quad (3.7)$$

并将它看作三维点 $\mathbf{x}$ 的函数 $Q(\mathbf{x}, t)$ 的泛函, 计算

$$\begin{aligned} \frac{\delta I_i(\mathbf{x}, t)}{\delta Q_j(\mathbf{y}, t)} = & \int d\mathbf{z} dt_z \left(\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta Q_{ci}(x_+) \delta Q_{ck}(z_+)} \frac{\delta Q_{ck}(z_+)}{\delta Q_{ci}(\mathbf{y}, t)} \right. \\ & \left. - \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta Q_{ci}(x_+) \delta Q_{ck}(z_-)} \frac{\delta Q_{ck}(z_-)}{\delta Q_j(\mathbf{y}, t)} \right) \Big|_{Q_{c+}=Q_{c-}=Q(t)}, \end{aligned}$$

注意

$$\frac{\delta Q_{ck}(z)}{\delta Q_j(\mathbf{y}, t)} \Big|_{Q_{c+}=Q_{c-}=Q(t)} = \delta_{jk} \delta^{(3)}(\mathbf{y} - \mathbf{z}),$$

得到

$$\frac{\delta I_i(\mathbf{x}, t)}{\delta Q_j(\mathbf{y}, t)} = \Gamma_{++ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, k_0 = 0, t) - \Gamma_{+-ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, k_0 = 0, t),$$

这里同(3.5)式一样出现了傅氏变换后的 $k_0 = 0$ 分量. 同理得

$$\begin{aligned} \frac{\delta I_i(\mathbf{y}, t)}{\delta Q_i(\mathbf{x}, t)} = & \Gamma_{++ji}(\mathbf{y}, \mathbf{x}, k_0 = 0, t) - \Gamma_{+-ji}(\mathbf{y}, \mathbf{x}, k_0 = 0, t) \\ = & \Gamma_{++ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, -k_0 = 0, t) - \Gamma_{-+ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, -k_0 = 0, t), \end{aligned}$$

这里利用了 $\hat{F}(k_0)$ 矩阵的对称性质^[45]. 于是

$$\frac{\delta I_i(\mathbf{x}, t)}{\delta Q_j(\mathbf{y}, t)} - \frac{\delta I_i(\mathbf{y}, t)}{\delta Q_i(\mathbf{x}, t)} = \lim_{k_0 \rightarrow 0} (\Gamma_{-+ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, -k_0, t) - \Gamma_{+-ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, k_0, t)). \quad (3.8)$$

在热平衡态附近由于^[3]

$$\Gamma_{+-} = e^{-\beta k_0} \Gamma_{-+},$$

(3.8)式右端等于零, 因而存在一个泛函 $F[Q_i(\mathbf{x}, t)]$, 使得

$$I_i(\mathbf{x}, t) = - \frac{\delta F}{\delta Q_i(\mathbf{x}, t)}. \quad (3.9)$$

(3.6) 式成为

$$\gamma(t) \frac{\partial Q(t)}{\partial t} = - \frac{\delta F}{\delta Q(t)} + J(t). \quad (3.10)$$

如果在外场 $J(t)$ 作用下, 宏变量 Q 不随 t 变化(定态), 则

$$\frac{\delta F}{\delta Q} = J. \quad (3.11)$$

可见 F 就是系统的有效自由能, (3.11)式就是 G-L 方程, 它决定宏变量的定态分布.

当系统处于远离平衡的定态时, 只要顶角函数的耗散部分 $A = i(\Gamma_{-+} - \Gamma_{+-})/2$ (参阅文献[4])满足条件

$$\lim_{k_0 \rightarrow 0} A_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, k_0, \tau) = 0, \quad (3.12)$$

(3.8)式也等于零, 仍然可以定义有效自由能或势函数 F , 把 I_i 写成它的变分导数. Graham 和 Haken^[13] 讨论过的由细致平衡维持的, 满足“势条件”的定态, 即应属于这一类. 在一切存在势函数 F 的定态附近, (3.10)式就是含时间的 G-L 方程组, 然而它的意义比通常所说的 TDGL 方程要广泛, 因为其中也包含了模耦合运动. 通常把矩阵 $\gamma(t)$ 求逆, 将(3.10)式写成

$$\frac{\partial Q(t)}{\partial t} = (\gamma(t))^{-1} \left(-\frac{\delta F}{\delta Q(t)} + J(t) \right). \quad (3.13)$$

利用顶角函数对称性质^[15]

$$\tilde{\Gamma}(k) = \tilde{\Gamma}^T(-k) = -\sigma_3 \tilde{\Gamma}^*(-k) \sigma_3 = -\sigma_3 \tilde{\Gamma}^+(k) \sigma_3,$$

可以证明 Γ_i 的实部是 k_0 的偶函数, 虚部是 k_0 的奇函数. 根据定义(3.5)式可以看出 $\gamma(t)$ 是一个实矩阵. 按照本节开头的编号规定, 把 $\gamma(t)$ 分成四块, 其中对应守恒量方程的两块 $\gamma_{\alpha\mathbf{x}, j\mathbf{y}}$ 和 $\gamma_{\alpha\mathbf{x}, \beta\mathbf{y}}$ 可以通过与 W-T 恒等式对比完全确定下来, 而对应序参量的两块, 一般情形下只能从对称考虑近似地决定其应有的形式.

最后应指出, (3.4)式相当于取马尔科夫近似, 而原来的方程 (3.2) 中包含着计入记忆效应的潜力.

四、守恒量方程与模耦合

在系统的对称群 G 作用下, 守恒量 q_α 的变换与群生成元 I^α 一致:

$$q_\alpha \rightarrow q'_\alpha = q_\alpha + i f_{\alpha\beta\gamma} \omega_\beta q_\gamma \quad (4.1)$$

其中 $f_{\alpha\beta\gamma}$ 是群的结构常数, ω_β 是无穷小变换参数. 序参量按群 G 的某个表示 $\hat{L}$ 变换:

$$Q_i \rightarrow Q'_i = Q_i + i L_{ij}^a \omega_a Q_j. \quad (4.2)$$

在文献[4]中证明了, 如果系统的拉氏量在群 G 的宇观作用下不变, 则有如下闭路上的 W-T 恒等式成立:

$$\langle \partial_\mu j_\alpha^\mu(\varphi) \rangle = i \left[\frac{\delta \Gamma}{\delta Q_{ci}(\mathbf{x})} L_{ij}^a Q_{cj}(\mathbf{x}) + f_{\alpha\beta\gamma} \frac{\delta \Gamma}{\delta q_\beta(\mathbf{x})} q_\gamma(\mathbf{x}) \right]. \quad (4.3)$$

(为从文献[4]中(3.17)式得(4.3)式, 只须利用一般关系 $\langle f(\varphi) \rangle = f\left(\varphi_c + i \frac{\delta}{\delta J}\right)$). 这里 $\Gamma \equiv \Gamma(Q_{ci}, q_\alpha)$ 和第三节中一样, 是插入了复合算子的顶角函数生成泛函. 在(4.3)式中取 $Q_{c+} = Q_{c-} = Q$, 并令

$$j_\alpha^\mu \equiv \langle j_\alpha^\mu(\varphi) \rangle,$$

于是它可以写成

$$\frac{\partial q_\alpha}{\partial t} = \nabla j_\alpha - i [J_i(\mathbf{x}, t) L_{ij}^a Q_j(\mathbf{x}, t) + f_{\alpha\beta\gamma} J_\beta(\mathbf{x}, t) q_\gamma(\mathbf{x}, t)], \quad (4.4)$$

这里 J, Q, q 等均已取在 $(-\infty, +\infty)$ 时间轴上.

为了确定守恒流 $\mathbf{j}_a$, 我们参照线性响应理论中处理热扰动的思想, 采用如下技巧. 引入人为的外源 ΔJ , 迭加在原有外源 J 上, 使系统进入定态:

$$\frac{\partial q_a}{\partial t} = 0,$$

这时方程(4.4)中 $\mathbf{j}_a$ 变成新的 $\mathbf{j}_a'$, 使得

$$\nabla \mathbf{j}_a' - i[(J_i + \Delta J_i)L_{ij}^a Q_j + f_{a\beta\gamma}(J_\beta + \Delta J_\beta)q_\gamma] = 0. \quad (4.5)$$

在(4.5)式中, 由于系统处于定态, 可以利用(3.11)式,

$$\frac{\delta F}{\delta Q_i} = J_i + \Delta J_i, \quad \frac{\delta F}{\delta q_a} = J_a + \Delta J_a, \quad (4.6)$$

将 $J + \Delta J$ 换成自由能 F 的泛函微商. $\mathbf{j}_a'$ 与未加入人为外源 ΔJ 的守恒流 $\mathbf{j}_a$ 之差, 可根据线性响应理论写为

$$\mathbf{j}_a' = \mathbf{j}_a - l_{a\beta} \nabla \left(\frac{\delta F}{\delta q_\beta} - J_\beta \right), \quad (4.7)$$

其中 $l_{a\beta}$ 是线性输运系数. 以上式代入(4.5)式就定出了

$$\nabla \mathbf{j}_a = l_{a\beta} \nabla^2 \left(\frac{\delta F}{\delta q_\beta} - J_\beta \right) + i \left[\frac{\delta F}{\delta Q_i} L_{ij}^a Q_j + f_{a\beta\gamma} \frac{\delta F}{\delta q_\beta} q_\gamma \right]. \quad (4.8)$$

将(4.8)式代回(4.4)式中, 就得到了守恒量的运动方程

$$\frac{\partial q_a}{\partial t} = l_{a\beta} \nabla^2 \left(\frac{\delta F}{\delta q_\beta} - J_\beta \right) + i \left[\left(\frac{\delta F}{\delta Q_i} - J_i \right) L_{ij}^a Q_j + f_{a\beta\gamma} \left(\frac{\delta F}{\delta q_\beta} - J_\beta \right) q_\gamma \right]. \quad (4.9)$$

把它和上一节中得到的广义 TDGL 方程(3.13)中对应守恒量的部分对比, 得出 γ^{-1} 矩阵的两块分别是

$$\gamma^{-1}(t)_{a\mathbf{x}, \beta\mathbf{y}} = -[l_{a\beta} \nabla_x^2 + i f_{a\beta\gamma} q_\gamma(\mathbf{x}, t)] \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (4.10)$$

$$\gamma^{-1}(t)_{a\mathbf{x}, i\mathbf{y}} = -i L_{ij}^a Q_j(\mathbf{x}, t) \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (4.11)$$

现在讨论序参量的方程组. 当序参量 Q_i 构成群 G 的不可约表示, 且在临界点附近其本身数值很小时, 可对 Q_i 展开, 而由对称性知道:

$$(\gamma^{-1}(t))_{i\mathbf{x}, j\mathbf{y}} = \delta_{ij}(\sigma)_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} + \cdots, \quad (4.12)$$

其中 $(\sigma)_{\mathbf{x}, \mathbf{y}}$ 不含 Q_i 而由系统的动力和耗散性质决定. 同样可以由对称考虑写出展开式:

$$(\gamma^{-1}(t))_{i\mathbf{x}, a\mathbf{y}} = i f L_{ij}^a Q_j(\mathbf{x}, t) \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + Q_i \text{ 的高阶项} \quad (4.13)$$

f 是群变换下的不变量, 在对 Q_i 的最低阶只能是常数. 为了确定 f 的值, 考虑耗散趋于零的极限. 这时(3.10)式中的 $\gamma(t)$ 矩阵以反称部分为主, 它的逆矩阵也是以反称部分为主. 方程(3.13)式展开式的打头项应是反称的, 于是对比(4.11)和(4.13)式, 定出

$$f = 1. \quad (4.14)$$

既然(4.13)式第一项本来与耗散无关, 有耗散存在时(4.14)式仍然成立. 当然在一般情形下展开式(4.12)和(4.13)还可能其他项, 其中包括耗散运动与可逆运动的同时作用. 本文暂不讨论它们. 在上述近似下, 序参量的方程组成为

$$\frac{\partial Q_i}{\partial t} = -\sigma \left(\frac{\delta F}{\delta Q_i} - J_i \right) - i L_{ij}^a Q_j \left(\frac{\delta F}{\delta q_a} - J_a \right). \quad (4.15)$$

(4.9)和(4.15)式就是我们推得的临界动力学基本方程组. 在闭路格林函数方法中,

这些方程中的 J 来自 $J_+ = J_-$, 乃是真正的物理外场, 其中也可以包含为反映其它未计入宏变量的自由度而附加的随机外场. 因此, 我们称这一方程组为广义的朗之万方程.

以上推导的重要特点, 是在广义朗之万方程中自然地得到了模耦合项, 它确实具有 (2.4) 式的形式. 在序参量和守恒量的耦合项中出现的是表示矩阵, 在守恒量之间的耦合项中出现的是群结构常数. 在对 Q_i 及 q_α 的线性近似下, 该式第一项的贡献为零. 具体地说, 可将矩阵 A 分成四块. 序参量之间的一块 $A_{ij} = 0$, 即不考虑它们之间的非耗散型耦合. 序参量与守恒量之间的一块 $A_{ia} = iL_{ij}^a Q_j$, 与守恒量无关, 所以 $\frac{\partial}{\partial q_\alpha} A_{ia} = 0$. 守恒量与序参量及守恒量之间的两块分别为 $A_{ai} = -iL_{ij}^a Q_j$ 及 $A_{\alpha\beta} = -if_{\alpha\beta\gamma} q_\gamma$. 由于表示矩阵及结构常数的反称性, 导数项为零. 如果考虑对 Q 或 q 的非线性关系, 利用非线性 W-T 恒等式可以求得带微商的项. 这一点我们将另文专门讨论.

作为具体例子, 考察各向同性的反铁磁模型, 即模型 $G^{[8]}$. 这里包含一个由三维矢量构成的非守恒序参量 $\mathbf{Q}$, 它代表交替磁矩密度. 还有一个三维矢量构成的守恒量密度 $\mathbf{q}$, 代表系统的总磁矩. 根据对易关系

$$\begin{aligned} [q_\alpha, q_\beta] &= ig_0 \epsilon_{\alpha\beta\gamma} q_\gamma, \\ [Q_i, q_\alpha] &= ig_0 \epsilon_{iaj} Q_j, \end{aligned} \quad (4.16)$$

可以直接定出结构常数与表示矩阵

$$\begin{aligned} f_{\alpha\beta\gamma} &= ig_0 \epsilon_{\alpha\beta\gamma}, \\ L_{ij}^a &= -ig_0 \epsilon_{iaj}, \end{aligned} \quad (4.17)$$

这里 $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$ 等是全反对称单位张量. 代入 (4.15) 及 (4.9) 式, 并将外场项吸收到自由能微商项中, 即令 $F \rightarrow F - J_i Q_i - J_\alpha q_\alpha$, 求得

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_i}{\partial t} &= -\sigma \frac{\delta F}{\delta Q_i} + g_0 \epsilon_{aij} Q_j \frac{\delta F}{\delta q_\alpha}, \\ \frac{\partial q_\alpha}{\partial t} &= l_{\alpha\beta} \nabla^2 \frac{\delta F}{\delta q_\beta} - g_0 \epsilon_{aij} \frac{\delta F}{\delta Q_i} Q_j \\ &\quad - g_0 \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \frac{\delta F}{\delta q_\beta} q_\gamma. \end{aligned} \quad (4.18)$$

若取 $\sigma = \Gamma_0$, $l_{\alpha\beta} = \lambda_0 \delta_{\alpha\beta}$, 并写成矢量形式, 即得文献 [8] 中的方程组

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} &= -\Gamma_0 \frac{\delta F}{\delta \mathbf{Q}} + g_0 \mathbf{Q} \times \frac{\delta F}{\delta \mathbf{q}}, \\ \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} &= \lambda_0 \nabla^2 \frac{\delta F}{\delta \mathbf{q}} + g_0 \mathbf{Q} \times \frac{\delta F}{\delta \mathbf{Q}} + g_0 \mathbf{q} \times \frac{\delta F}{\delta \mathbf{q}}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

A, B, C 模型中没有非耗散型模耦合, 情形更简单, 其余 E, F, H, J 模型^[8]及 SSS 模型^[14]等均可按完全相同的方法得出, 这里不再赘述.

参 考 文 献

- [1] J. Schwinger, *J. Math. Phys.*, 2(1961), 407; Л. Келдыш, *ЖЭТФ*, 47(1964), 1515.
- [2] D. Dubois, In "Lectures in Theoretical Physics", vol. IX C, ed. by W. E. Brittin, Gordon and Breach, N. Y., (1967); V. Korenman, *Ann. Phys. (N. Y.)*, 39(1966), 72; D. Langreth, In "Linear and Nonlinear Transport in Solids", ed. by J. Devreese and V. Van Doren, Plenum,

- N. Y., (1976); A.-M. Tremblay, B. Patton, P. C. Martin, P. Maldaque, *Phys. Rev.*, **A19**(1979), 1721.
- [3] 周光召、苏肇冰, 统计物理进展, 第五章, 科学出版社即将出版.
- [4] 周光召、苏肇冰, 高能物理与核物理, **3**(1979), 314.
- [5] 周光召、苏肇冰, 高能物理与核物理, **3**(1979), 304.
- [6] 周光召、苏肇冰, 物理学报, **29**(1980), 618.
- [7] P. C. Martin, E. D. Siggia, H. A. Rose, *Phys. Rev.*, **A8**(1973), 423.
- [8] P. C. Hohenberg, B. I. Halperin, *Rev. Mod. Phys.*, **49**(1977), 435.
- [9] K. Kawasaki, In "Critical Phenomena", Inter. Sch. of Physics "Enrico Fermi", LI, ed. by M. S. Green, Acad. Press, (1971).
- [10] 可参阅: B. I. Halperin, P. C. Hohenberg, S. K. Ma, *Phys. Rev.*, **B10**(1974), 139; S. K. Ma, G. F. Mazenko, *Phys. Rev.*, **B11**(1975), 4077.
- [11] H. K. Janssen, *Z. Physik*, **B23**(1976), 377; R. Bausch, H. K. Janssen, H. Wegner, *Z. Physik*, **B24**(1976), 113; C. De Dominicis, L. Peliti, *Phys. Rev.*, **B18**(1978), 353.
- [12] 周光召、郝柏林、于渌, 本刊本期, 969.
- [13] R. Graham, H. Haken, *Z. Physik*, **243**(1971), 289.
- [14] L. Sasvari, F. Schwabl, P. Szepfalussy, *Physica*, **A81**(1975), 108.
- [15] 周光召、于渌、郝柏林, 物理学报, **29** (1980), 878.

NONEQUILIBRIUM STATISTICAL FIELD THEORY AND CRITICAL DYNAMICS (I)

GENERALIZED LANGEVIN EQUATION

ZHOU GUANG-ZHAO SU ZHAO-BIN HAO BAI-LIN YU LU

(Institute of Theoretical Physics, Academia Sinica)

ABSTRACT

Starting from the equations satisfied by the vertex functions on the closed time path, we derived the generalized Langevin equations for the order parameters and the conserved variables. The proper form of the equations for the conserved variables, including automatically the mode coupling terms, was determined from the Ward-Takahashi identities and the linear response theory. All existing dynamic models were recovered by assuming the corresponding symmetry properties of the system. The whole theoretical framework is also applicable for describing the systems near steady states far from equilibrium.